

SERÁ O INFINITO UM PONTO?

Sergio Alves

IME – USP

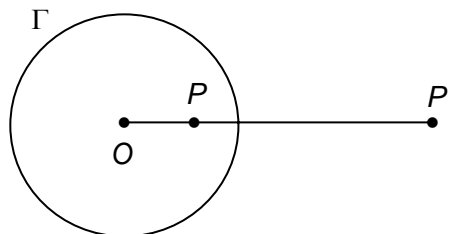
salves@ime.usp.br

Inspirado no artigo de mesmo título publicado na Revista Educação e Matemática, Nº 95, Portugal (2007)

\mathcal{E} : plano euclidiano

Γ : circunferência (em \mathcal{E}) de centro O e raio r

Definição. Para cada ponto $P \in \mathcal{E}$, P distinto de O , o **inverso de P em relação à Γ** é o único ponto P' da semi-reta \overrightarrow{OP} tal que $OP \cdot OP' = r^2$.



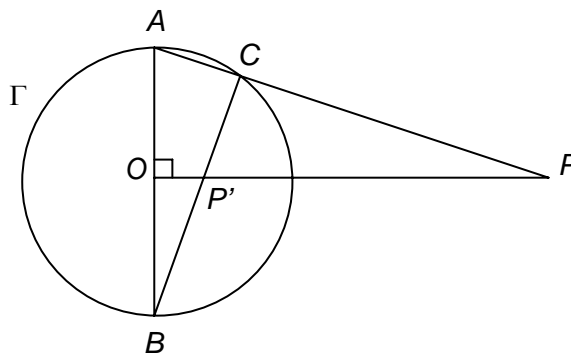
Propriedades Elementares

- $P' = P$ se, e somente se, $P \in \Gamma$
- Se $P \in \text{int } \Gamma$ então $P' \in \text{ext } \Gamma$
- Se $P \in \text{ext } \Gamma$ então $P' \in \text{int } \Gamma$
- $(P')' = P$

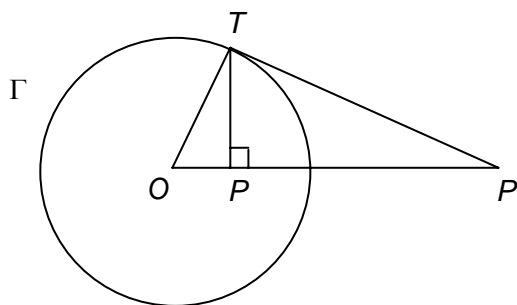
Notação: $P' = I_{\Gamma}(P)$

- $I_{\Gamma}: \mathcal{E} - \{O\} \rightarrow \mathcal{E} - \{O\}$ é uma aplicação bijetora
- $(I_{\Gamma})^{-1} = I_{\Gamma}$

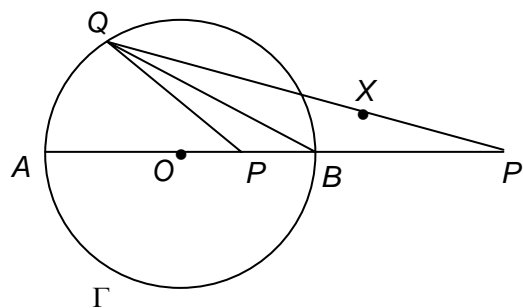
Obtenção do inverso de um ponto com régua não graduada e compasso



(justificativa: $\triangle OPA \sim \triangle OBP'$)



(justificativa: $\triangle OPT \sim \triangle OTP'$)



$Q \in \Gamma$ arbitrário, $\angle XQB \cong \angle PQB$ (justificativa:?)

Plano Inversivo

Note que quanto mais o ponto P se aproxima do centro O , mais o seu inverso P' se afasta de O e, reciprocamente, quanto mais o ponto P se afasta de O , mais o seu inverso P' se aproxima de O .

Com o intuito de preservar a bijetividade e a continuidade da aplicação inversão $I_{\Gamma}: \mathcal{E} - \{O\} \rightarrow \mathcal{E} - \{O\}$, adicionamos ao plano euclidiano \mathcal{E} um ponto Ω , chamado **ponto no infinito**, e estendemos a aplicação I_{Γ} definindo $I_{\Gamma}(O) = \Omega$ e $I_{\Gamma}(\Omega) = O$.

O conjunto $\mathcal{E}^* = \mathcal{E} \cup \{\Omega\}$ recebe o nome de **plano inversivo** e a nova aplicação $I_{\Gamma}: \mathcal{E}^* \rightarrow \mathcal{E}^*$ assim definida é uma aplicação bijetora.

Uma reta m^* do plano inversivo \mathcal{E}^* será considerada como sendo uma reta m do plano euclidiano \mathcal{E} adicionada do ponto no infinito Ω , isto é, $m^* = m \cup \{\Omega\}$. As circunferências do plano inversivo \mathcal{E}^* serão as circunferências usuais do plano euclidiano \mathcal{E} . Duas retas paralelas do plano euclidiano \mathcal{E} , quando estendidas ao plano inversivo \mathcal{E}^* , serão consideradas tangentes em Ω .

Em resumo, temos

\mathcal{E} : plano euclidiano

$\mathcal{E}^* = \mathcal{E} \cup \{\Omega\}$: plano inversivo

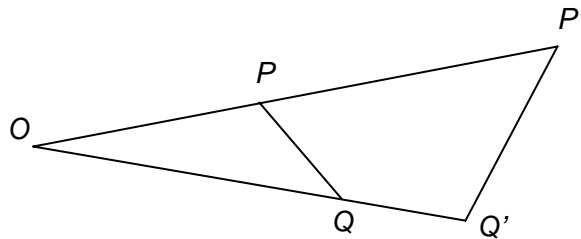
Ω : ponto no infinito

- $I_{\Gamma}(O) = \Omega$
- $I_{\Gamma}(\Omega) = O$
- $I_{\Gamma}: \mathcal{E}^* \rightarrow \mathcal{E}^*$ é uma aplicação bijetora
- A reta do plano inversivo \mathcal{E}^* é a reta usual de \mathcal{E} adicionada do ponto no infinito ($m^* = m \cup \{\Omega\}$)
- A circunferência do plano inversivo \mathcal{E}^* é a circunferência usual de \mathcal{E}
- Duas retas paralelas de \mathcal{E} , quando estendidas a \mathcal{E}^* , são consideradas tangentes em Ω

Propriedades da Inversão

Γ : circunferência do plano euclidiano \mathcal{E} de centro O e raio r

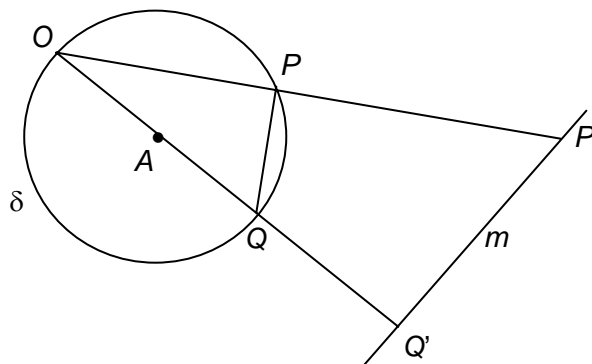
Lema. Sejam P e Q pontos tais que O, P, Q são não colineares. Se $P' = I_{\Gamma}(P)$ e $Q' = I_{\Gamma}(Q)$ então $\triangle OPQ \sim \triangle OQ'P'$. Em particular, $P'Q' = \frac{r^2}{OP \cdot OQ} PQ$.



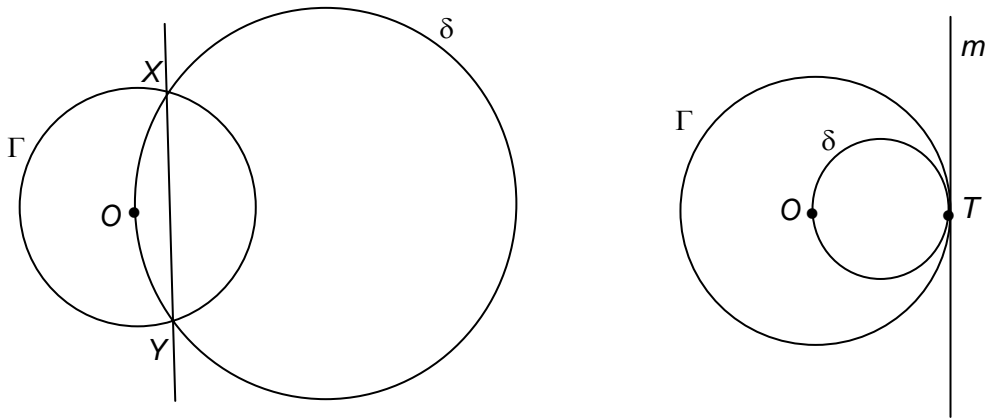
(*Prova:* Basta observar que os referidos triângulos satisfazem às hipóteses do critério LAL de semelhança de triângulos.)

Propriedade 1. Se m é uma reta do plano euclidiano \mathcal{E} que contém o centro O da circunferência Γ então $I_{\Gamma}(m - \{O\}) = m - \{O\}$. Se $m^* = m \cup \{\Omega\}$ então $I_{\Gamma}(m^*) = m^*$.

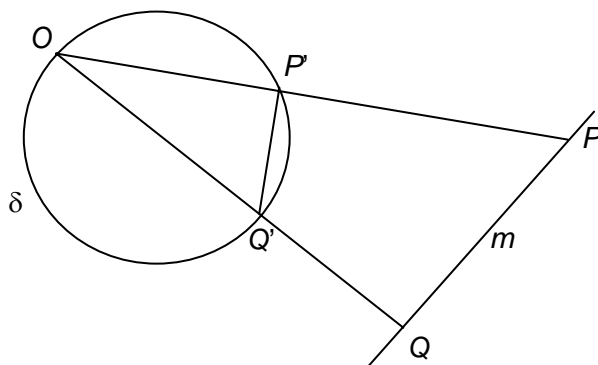
Propriedade 2. Se δ é uma circunferência do plano euclidiano \mathcal{E} de centro A que passa pelo centro O da circunferência Γ então $I_{\Gamma}(\delta - \{O\}) = m$ onde m é uma reta do plano euclidiano \mathcal{E} que não contém o ponto O e é perpendicular à reta \overline{OA} . Além disso, se $m^* = m \cup \{\Omega\}$ então $I_{\Gamma}(\delta) = m^*$.



(Prova: Sendo $Q \in \delta$ com $O - A - Q$ e $Q' = I_{\Gamma}(Q)$, considere a reta m perpendicular a \overline{OA} em Q' . Use o lema acima para concluir que $P \in \delta - \{O\}$ se e somente se $P' = I_{\Gamma}(P) \in m$.)

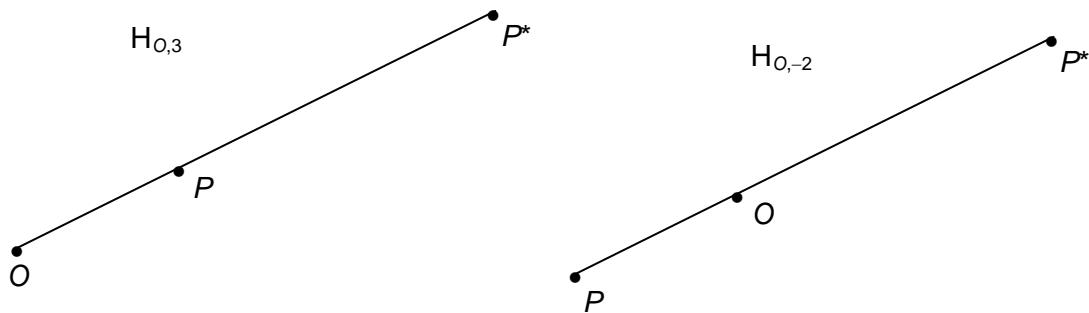


Propriedade 3. Se m é uma reta do plano euclidiano \mathcal{E} que não contém o centro O da circunferência Γ então $I_{\Gamma}(m) = \delta - \{O\}$ onde δ é uma circunferência do plano euclidiano \mathcal{E} que passa por O e cujo centro está na perpendicular a m traçada a partir de O . Além disso, se $m^* = m \cup \{\Omega\}$ então $I_{\Gamma}(m^*) = \delta$.

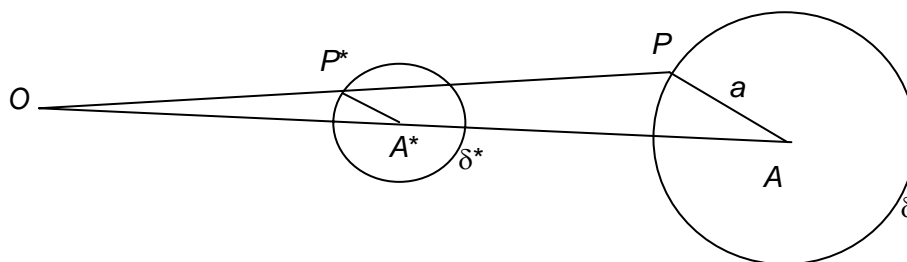


(Prova: Sendo Q o pé da perpendicular a m traçada a partir de O , considere $Q' = I_{\Gamma}(Q)$ e tome δ a circunferência do plano euclidiano \mathcal{E} de diâmetro $\overline{OQ'}$. Use o lema acima para concluir que $P \in m$ se e somente se $P' = I_{\Gamma}(P) \in \delta - \{O\}$.)

Definição. Seja O um ponto do plano euclidiano \mathcal{E} e λ um número real não nulo. A **homotetia de centro O e razão λ** é a aplicação $H_{O,\lambda}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ que fixa o ponto O e associa a cada ponto P , P distinto de O , o único ponto P^* pertencente à reta \overline{OP} , com P e P^* do mesmo lado ou em lados opostos de O conforme $\lambda > 0$ ou $\lambda < 0$, respectivamente, e tal que $OP^* = |\lambda|OP$.

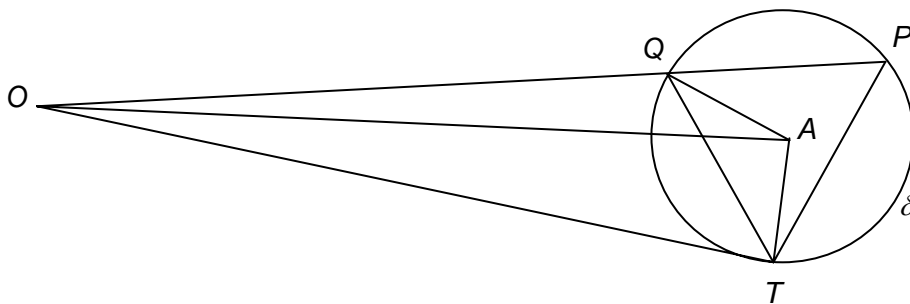


- $H_{O,\lambda}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ é uma aplicação bijetora
- $(H_{O,\lambda})^{-1} = H_{O,1/\lambda}$
- $H_{O,\lambda}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ é uma **semelhança** de razão $|\lambda|$
- Dada uma reta m , então $H_{O,\lambda}(m) = n$ onde n é uma reta paralela a m ($n = m$ se m contém O)
- Dada uma circunferência δ de centro A e raio a , então $H_{O,\lambda}(\delta) = \delta^*$ onde δ^* é a circunferência de centro $A^* = H_{O,\lambda}(A)$ e raio $|\lambda|a$



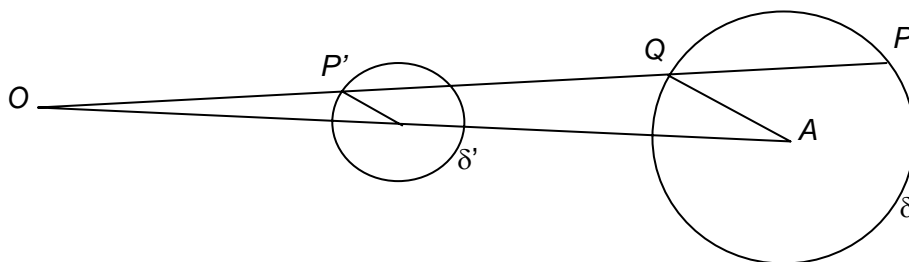
Definição. Seja δ uma circunferência do plano euclidiano \mathcal{E} de centro A e raio a . Dado um ponto arbitrário O , o número $p = OA^2 - a^2$ é chamado a **potência** de O relativamente à circunferência δ .

- $p = 0$ se e somente se $O \in \delta$
- $p > 0$ se e somente se $O \in \text{ext } \delta$
- $p < 0$ se e somente se $O \in \text{int } \delta$
- Se traçarmos por um ponto $O \in \text{ext } \delta$ uma secante a δ (em P e Q) e uma tangente a δ (em T), então $OP \cdot OQ = OT^2 = p$.



(Prova: Use o fato que $\triangle OPT \sim \triangle OTQ$ e o teorema de Pitágoras no $\triangle OAT$)

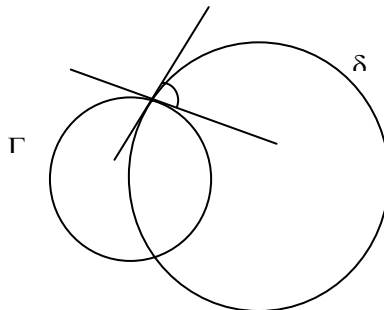
Propriedade 4. Se δ é uma circunferência do plano euclidiano \mathcal{E} que não passa pelo centro O da circunferência Γ , então $I_{\Gamma}(\delta)$ é uma outra circunferência δ' do plano euclidiano \mathcal{E} que também não passa por O . Mais precisamente, $\delta' = H_{O,\lambda}(\delta)$ onde $\lambda = \frac{r^2}{p}$ e p é a potência de O relativamente à δ .



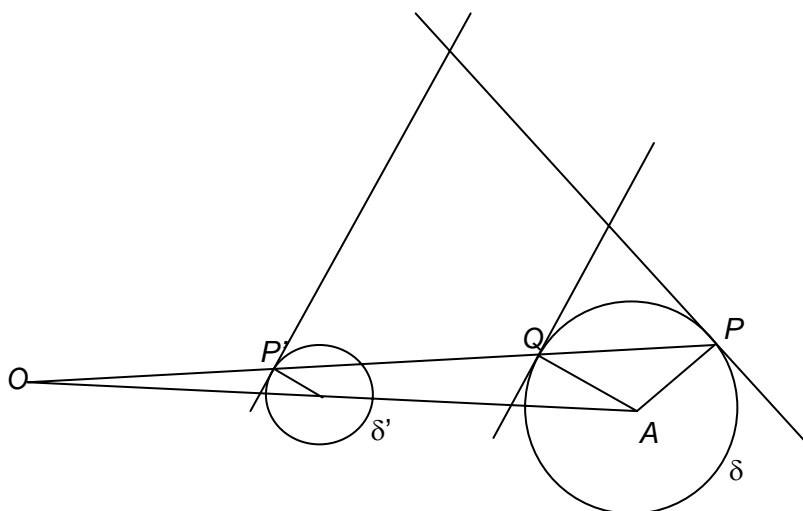
Observação. Se a circunferência δ tem centro A e raio a então δ' é a circunferência de centro $A^* = H_{O,\lambda}(A)$ e raio $|\lambda|a$.

(*Prova:* Suponha $O \in \text{ext } \delta$ de modo que $p > 0$. Dado $P \in \delta$, a reta que passa por O e P corta δ num segundo ponto Q ($Q = P$ se a reta for tangente a δ) e temos $OP \cdot OQ = p$. Por outro lado, se $P' = I_{\Gamma}(P)$ então $OP \cdot OP' = r^2$ donde $OP' = \frac{r^2}{OP} OQ = \lambda OQ$, ou seja, $P' = H_{O,\lambda}(Q)$. Quando P descreve δ , o mesmo acontece com Q e como circunferências são preservadas pelas homotetias segue-se o resultado desejado. A prova quando $O \in \text{int } \delta$ é similar.)

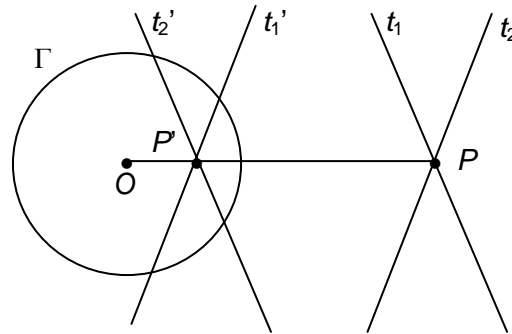
Definição. A medida do ângulo de intersecção de duas circunferências do plano euclidiano \mathcal{E} (ou de uma circunferência e uma reta, ou ainda, de duas retas) é a menor das medidas dos ângulos entre as duas tangentes num dos pontos de intersecção.



Lema. Seja δ uma circunferência (ou uma reta) do plano euclidiano \mathcal{E} . Dado um ponto $P \in \delta$, P distinto de O , considere $P' = I_{\Gamma}(P)$ e $\delta' = I_{\Gamma}(\delta)$. Se $P \neq P'$ então as tangentes a δ e δ' em P e P' , respectivamente, são simétricas em relação à mediatriz do segmento $\overline{PP'}$. Se $P = P'$ então as tangentes são simétricas em relação à perpendicular a \overline{OP} que contém P .



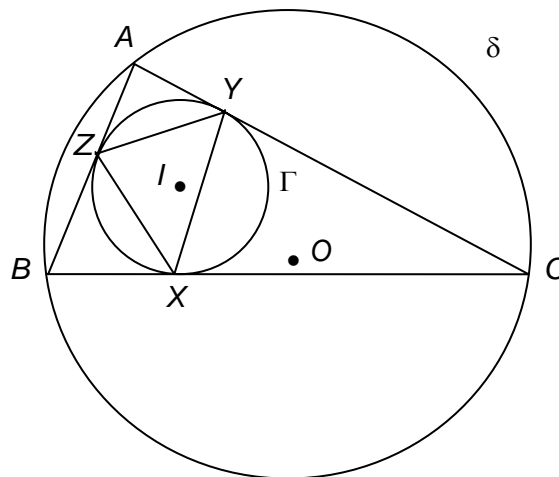
Propriedade 5. O ângulo orientado de intersecção de duas circunferências do plano euclidiano \mathcal{E} é preservado em medida, porém, troca de orientação sob a ação de uma inversão I_Γ . O mesmo resultado é válido para o ângulo orientado de intersecção de duas retas ou de uma circunferência e uma reta.



Observação. Em particular, retas ou circunferências tangentes em P são invertidas em retas ou circunferências tangentes em $P' = I_\Gamma(P)$.

Aplicação 1. (Euler) Sejam O e I o circuncentro e o incentro, respectivamente, de um triângulo $\triangle ABC$. Sendo R o raio da circunferência circunscrita ao triângulo e r o raio da circunferência inscrita, temos $IO^2 = R^2 - 2rR$.

Prova: Indiquemos por Γ a circunferência inscrita no triângulo $\triangle ABC$ e sejam X , Y e Z os pontos de tangência de Γ com os lados do triângulo como na figura abaixo.



Os inversos, em relação à Γ , dos vértices A , B e C são os pontos médios dos segmentos \overline{YZ} , \overline{XZ} e \overline{XY} , respectivamente. Logo, sendo δ a circunferência circunscrita ao ΔABC , temos que $\delta' = I_{\Gamma}(\delta)$ é a circunferência circunscrita ao triângulo medial do ΔXYZ , ou seja, é a circunferência dos nove pontos do ΔXYZ .

Como os raios de δ e δ' são, respectivamente, R e $\frac{r}{2}$ e a potência do centro I da circunferência Γ relativamente à δ é igual a $IO^2 - R^2 < 0$, concluímos que

$$\frac{r}{2} = \frac{r^2}{R^2 - IO^2} R$$

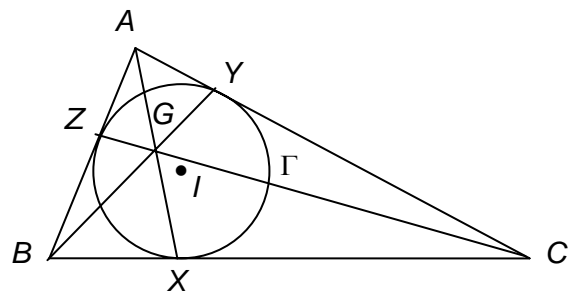
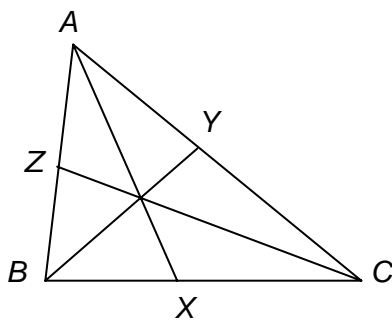
ou seja,

$$IO^2 = R^2 - 2rR.$$

Aplicação 2. (Mathematics Magazine, Vol 81, Junho 2008)

Definição. Uma **ceviana** de um triângulo é qualquer segmento ligando um vértice a um ponto pertencente ao lado oposto.

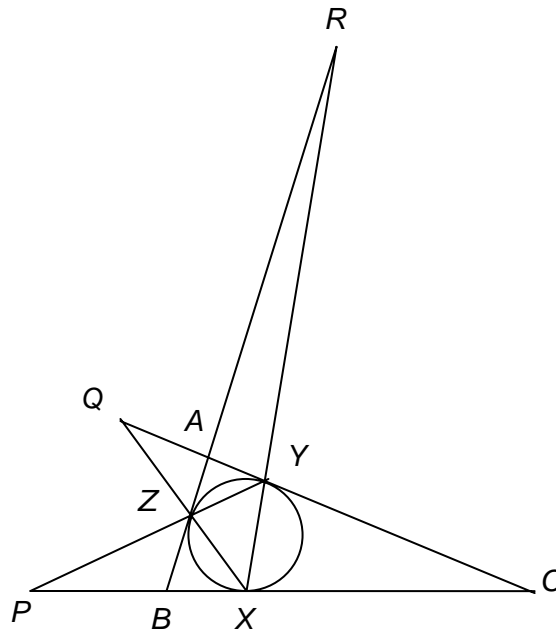
Teorema. (Giovanni Ceva – 1678) As cevianas \overline{AX} , \overline{BY} e \overline{CZ} de um triângulo ΔABC são concorrentes se e somente se $\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$.



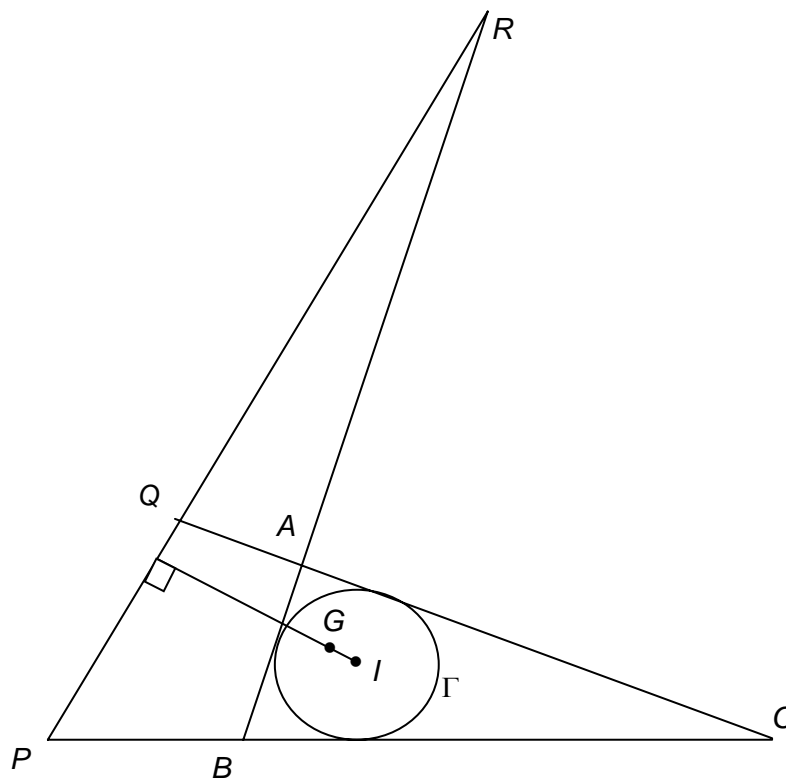
Indiquemos por Γ a circunferência inscrita no triângulo não equilátero ΔABC e sejam X , Y e Z os pontos de tangência de Γ com os lados \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} , respectivamente, do triângulo. Então \overline{AX} , \overline{BY} e \overline{CZ} são concorrentes num ponto G chamado **ponto de Gergonne** do triângulo ΔABC .

Como $\triangle ABC$ é um triângulo não equilátero segue que G e o centro I da circunferência Γ (o **incentro** do triângulo) são pontos distintos.

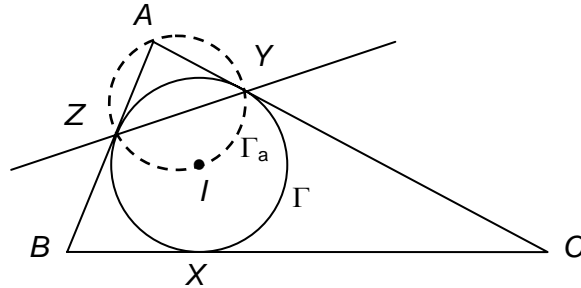
Consideremos os pontos P , Q e R dados por $\{P\} = \overline{BC} \cap \overline{YZ}$, $\{Q\} = \overline{AC} \cap \overline{XZ}$ e $\{R\} = \overline{AB} \cap \overline{XY}$.



Teorema. Nas condições acima, os pontos P , Q e R são colineares. Além disso, a reta que os contém é perpendicular à reta \overline{GI} .

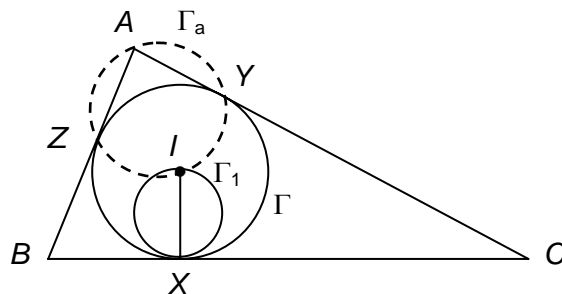


Prova. Observamos inicialmente que $\angle IYA$ e $\angle IZA$ são ângulos retos de modo que os pontos A, Y, I e Z pertencem a uma circunferência Γ_a de diâmetro \overline{IA} . Pela propriedade 2 da inversão temos que $I_\Gamma(\Gamma_a - \{I\}) = \overline{YZ}$.

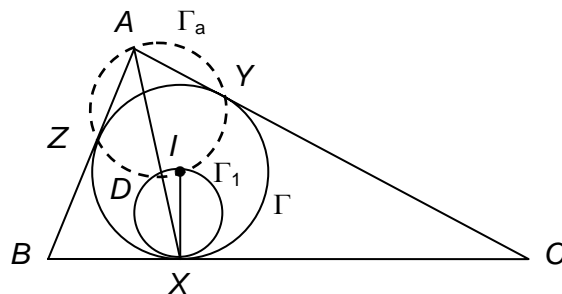


Analogamente, sendo Γ_b e Γ_c as circunferências de diâmetros \overline{IB} e \overline{IC} , respectivamente, temos $I_\Gamma(\Gamma_b - \{I\}) = \overline{XZ}$ e $I_\Gamma(\Gamma_c - \{I\}) = \overline{XY}$.

Considere agora as circunferências Γ_1, Γ_2 e Γ_3 de diâmetro $\overline{IX}, \overline{IY}$ e \overline{IZ} , respectivamente. Então $I_\Gamma(\Gamma_1 - \{I\}) = \overline{BC}$, $I_\Gamma(\Gamma_2 - \{I\}) = \overline{AC}$ e $I_\Gamma(\Gamma_3 - \{I\}) = \overline{AB}$.



Seja D a projeção ortogonal do incentro I sobre \overline{AX} temos que $\angle IDX$ e $\angle IDA$ são ângulos retos de modo que $D \in \Gamma_a \cap \Gamma_1$ com D distinto de I . Segue que $I_\Gamma(D) \in I_\Gamma(\Gamma_a - \{I\}) \cap I_\Gamma(\Gamma_1 - \{I\}) = \overline{YZ} \cap \overline{BC}$, ou seja, $I_\Gamma(D) = P$.



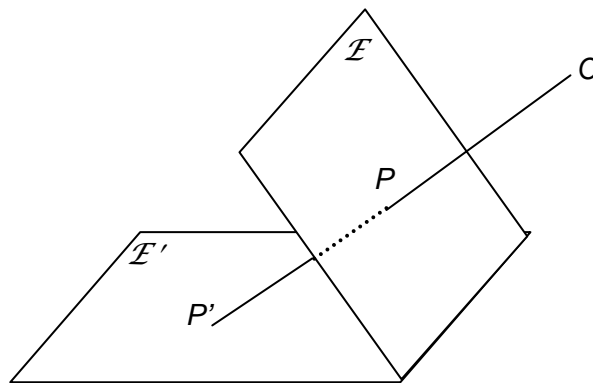
Analogamente, se E e F são as projeções ortogonais de I sobre \overline{BY} e \overline{CZ} , respectivamente, então $I_{\Gamma}(E) = Q$ e $I_{\Gamma}(F) = R$.

Finalmente, sendo G o ponto de Gergonne do triângulo $\triangle ABC$ tem-se que $\angle IDG$, $\angle IEG$ e $\angle IFG$ são ângulos retos e, portanto, os pontos D , E e F pertencem à circunferência δ de diâmetro \overline{GI} .

Como $I_{\Gamma}(\delta - \{I\})$ é uma reta m perpendicular à reta \overline{GI} concluímos que P , Q e R são colineares e a reta que os contém é perpendicular à reta \overline{GI} .

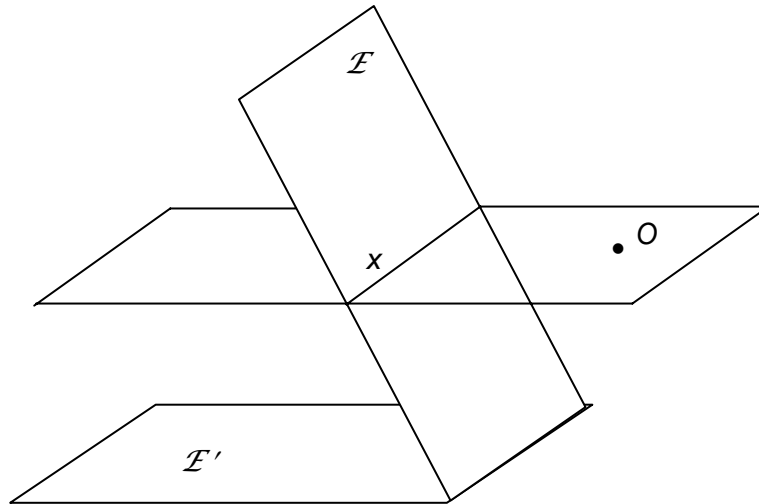
Pelo que vimos até aqui, no que diz respeito ao plano inversivo, o infinito se reduz a um ponto. Veremos agora outra situação em que precisamos adicionar uma infinidade de infinitos (!) ao plano euclidiano para podermos estender de modo conveniente certa aplicação.

Sejam \mathcal{E} e \mathcal{E}' dois planos secantes do espaço euclidiano e seja O um ponto não pertencente nem a \mathcal{E} nem a \mathcal{E}' .

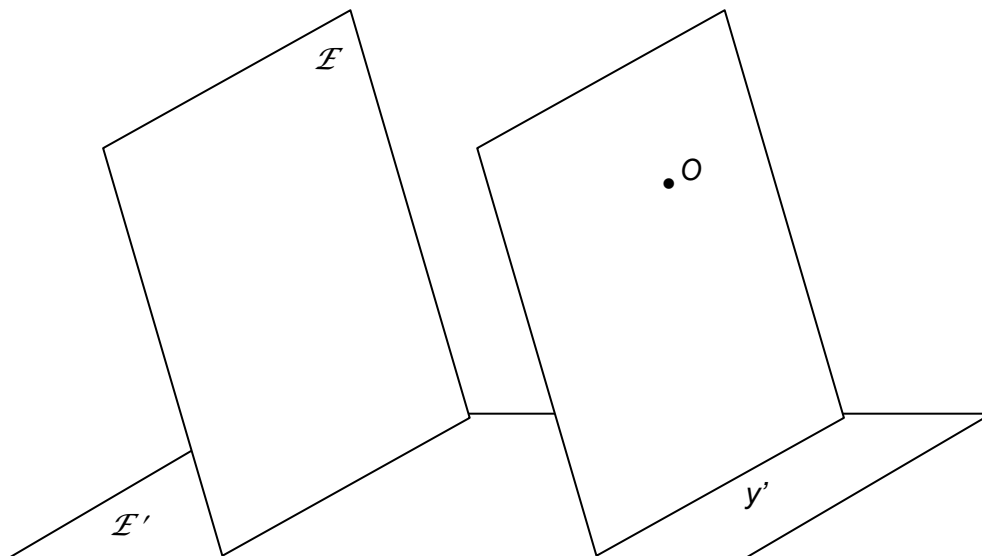


Definição. A aplicação que a cada ponto $P \in \mathcal{E}$ associa o ponto $P' \in \mathcal{E}'$ em que a reta \overline{OP} intersecta o plano \mathcal{E}' (ou seja, $\{P'\} = \overline{OP} \cap \mathcal{E}'$) é chamada **projeção central** de \mathcal{E} em \mathcal{E}' com centro O . Escreveremos $P' = P_O(P)$.

Existe uma reta especial x contida em \mathcal{E} cujos pontos não têm imagem em \mathcal{E}' . Mais precisamente, x é a reta intersecção de \mathcal{E} com o plano paralelo a \mathcal{E}' passando por O de modo que a reta determinada por O e por um ponto arbitrário da reta x é paralela ao plano \mathcal{E}' . Alguns autores designam a reta x como a **reta do horizonte** do plano \mathcal{E} .



Analogamente, existe uma reta especial y' contida em \mathcal{E}' cujos pontos não têm pré-imagem em \mathcal{E} . Mais precisamente, y' é a reta intersecção de \mathcal{E}' com o plano paralelo a \mathcal{E} passando por O de modo que a reta determinada por O e por um ponto arbitrário da reta y' é paralela ao plano \mathcal{E} .



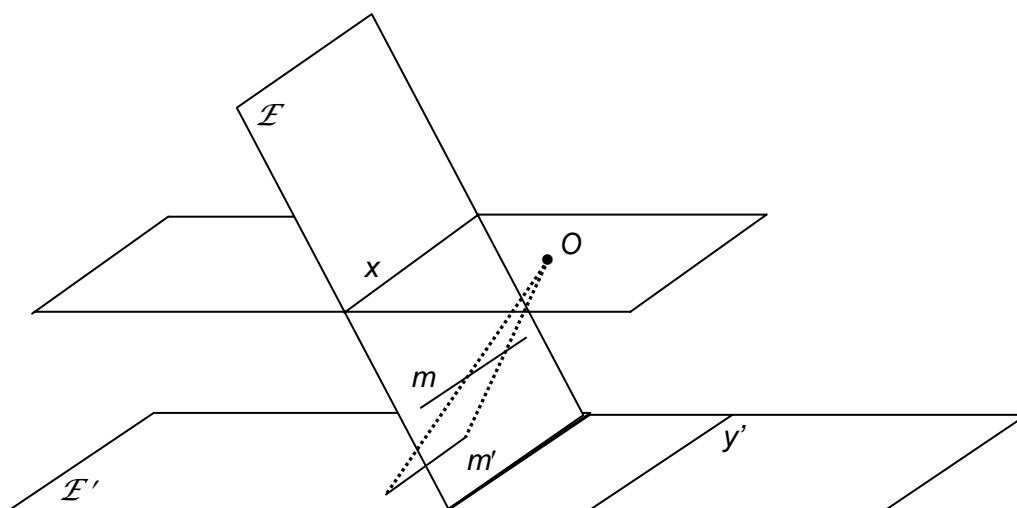
Propriedades Elementares da Projeção Central

- $P_O: \mathcal{E} - x \rightarrow \mathcal{E}' - y'$ é uma aplicação bijetora
- $(P_O)^{-1} = P_O$

Problema 1. Qual a imagem, pela projeção central P_O , de uma reta m contida no plano \mathcal{E} ?

Solução. Sendo σ o plano determinado pelo ponto O e pela reta m , sua imagem pela projeção central P_O é a reta m' obtida pela intersecção dos planos σ e \mathcal{E}' .

Se m é paralela à reta especial x então a imagem m' é paralela à reta especial y' .



Suponha que m e x sejam concorrentes num ponto M . Na figura abaixo se indica a projeção central de quatro pontos A , B , C e D pertencentes à reta m .

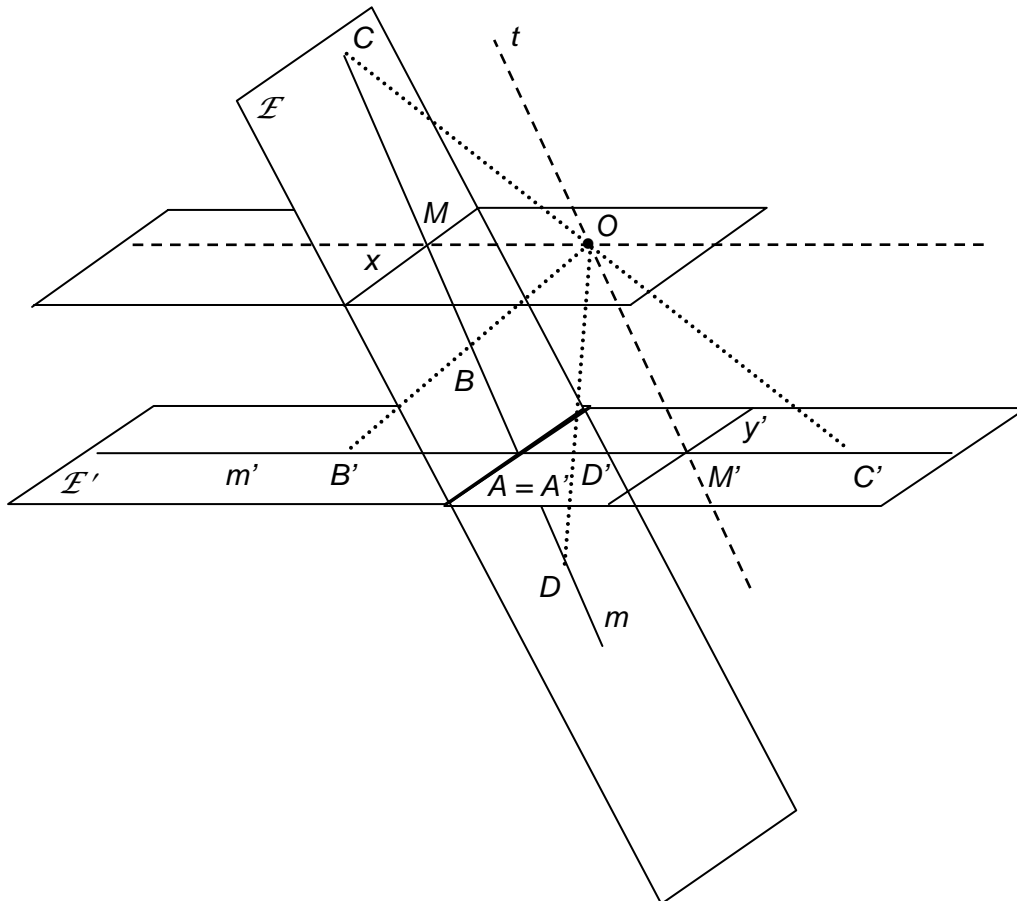
O ponto A está na intersecção dos planos \mathcal{E} e \mathcal{E}' e, portanto, $A = A'$.

À medida que o ponto B vai percorrendo o segmento AM , sua imagem pela projeção central vai descrevendo a semi-reta (contida em m') com origem A' paralela à reta que passa por O e M .

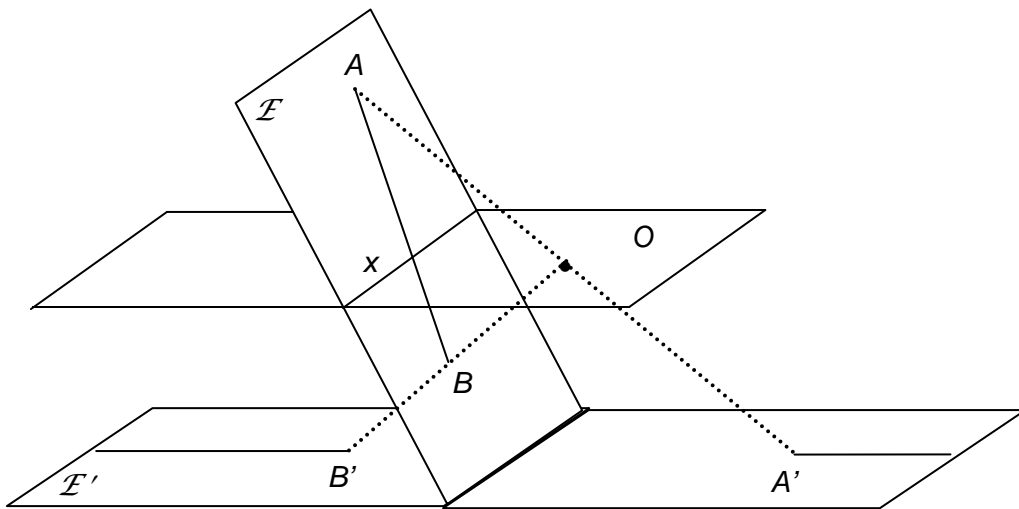
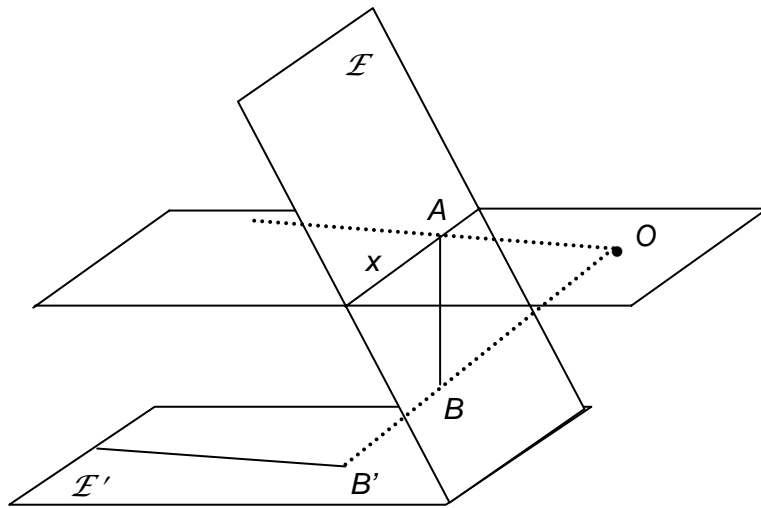
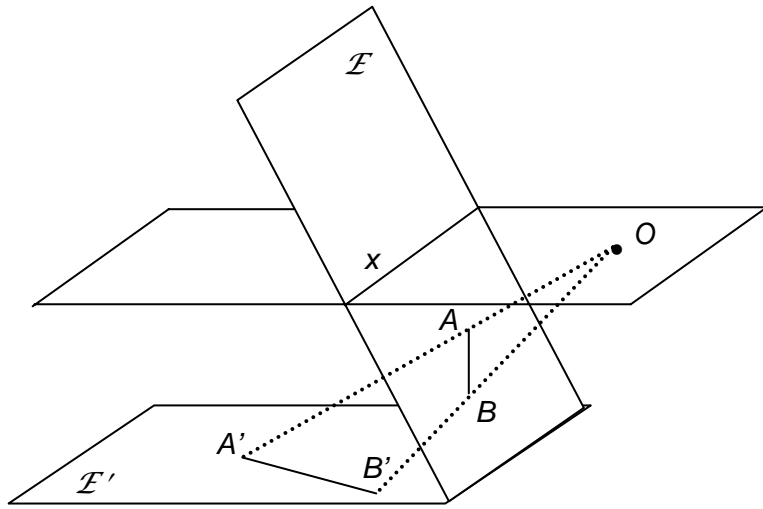
Sendo t a paralela a m passando por O , à medida que o ponto C se afasta de modo que a reta determinada por O e C se aproxima mais e mais de t , a

projeção C' de C vai se aproximando do ponto M' em que t intersecta a reta especial y' .

À medida que o ponto D vai percorrendo a semi-reta de m com origem A , sua imagem pela projeção central vai descrevendo o segmento (contido em m') de extremos A' e M' .

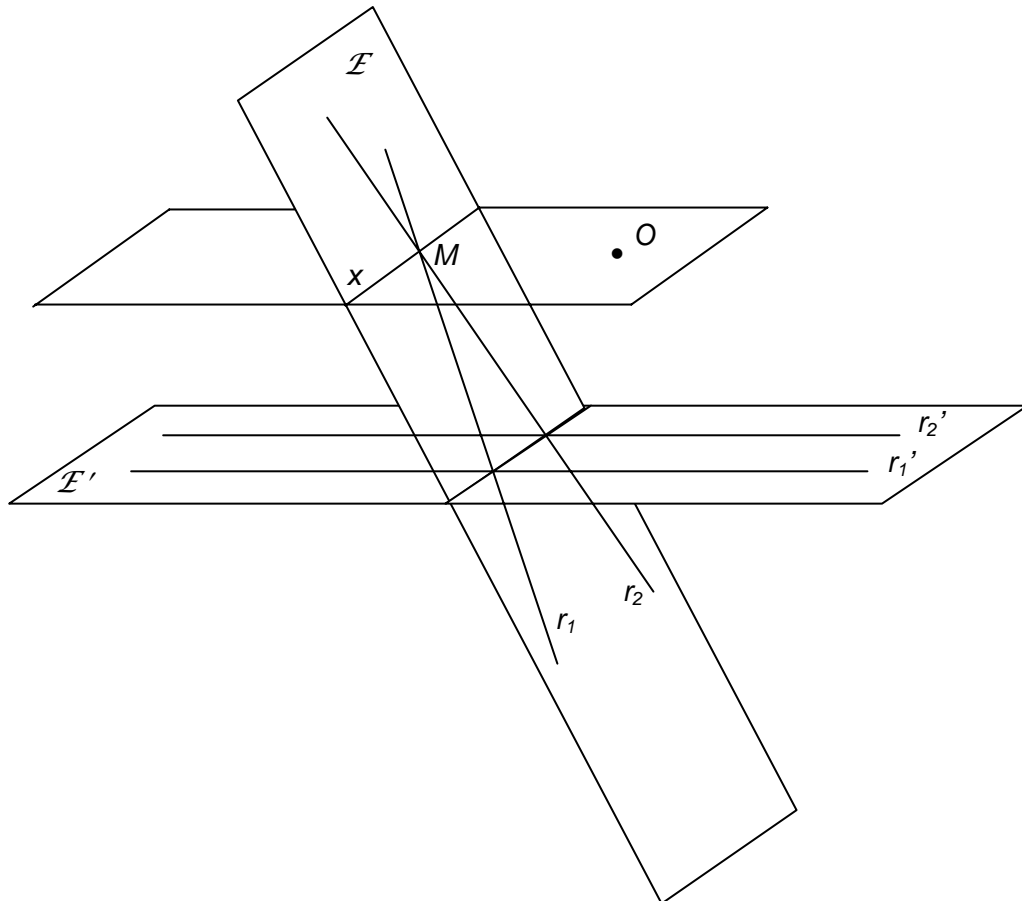


Observação. Na construção acima podemos comprovar que a imagem, pela projeção central P_O , de um segmento \overline{AB} contido no plano \mathcal{E} é também um segmento se \overline{AB} não intersecta a reta especial x . Se um dos extremos, digamos A , do segmento pertence à reta especial x , então a imagem é uma semi-reta paralela à reta que passa por O e A . Finalmente, se a reta especial x intersecta \overline{AB} em um ponto do seu interior, então a imagem é a reunião de duas semi-retas colineares.



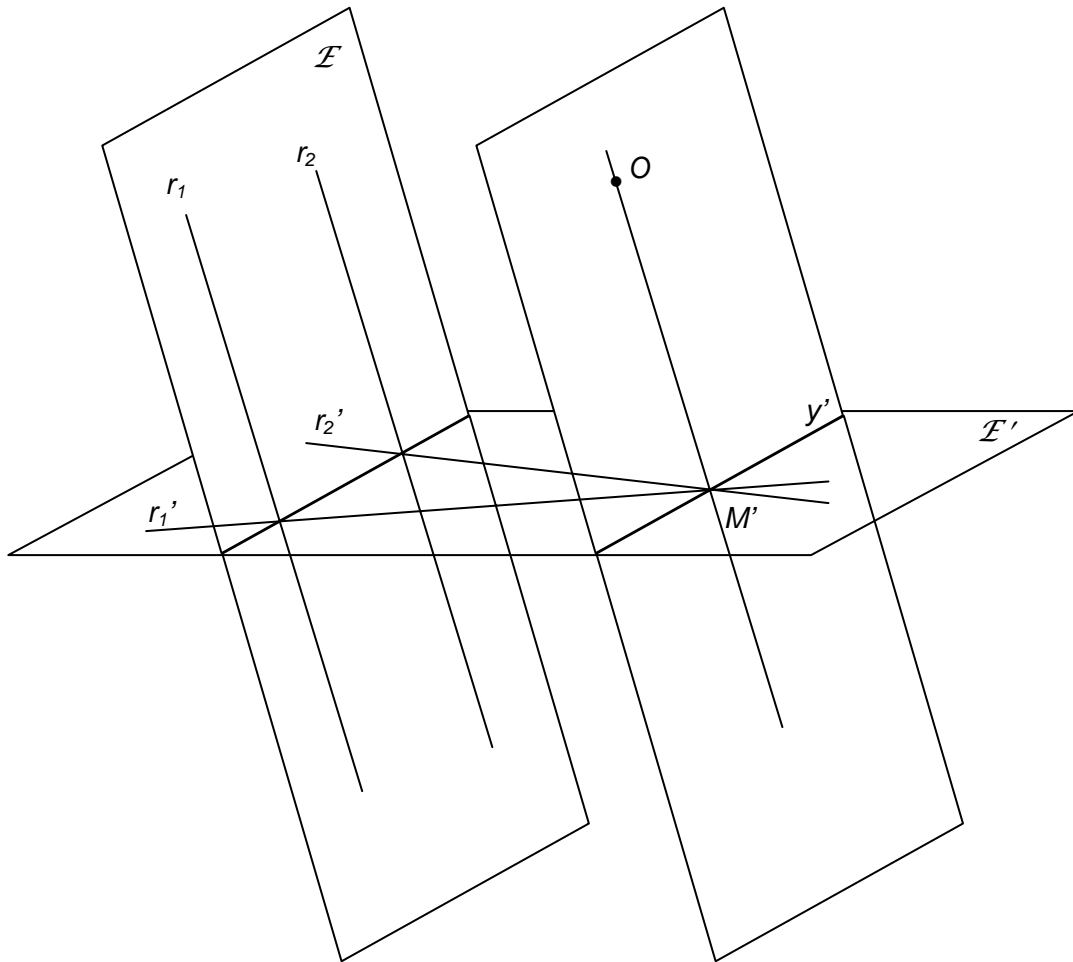
Problema 2. Sejam r_1 e r_2 duas retas contidas no plano \mathcal{E} que se intersectam num ponto M pertencente à reta especial x . Quais as imagens, pela projeção central P_O , das retas r_1 e r_2 ?

Solução. As imagens serão duas retas paralelas (ambas paralelas à reta que passa pelos pontos O e M).



Problema 3. Sejam r_1 e r_2 duas retas paralelas contidas no plano \mathcal{E} . Quais as imagens, pela projeção central P_O , das retas r_1 e r_2 ?

Solução. Se r_1 e r_2 não são paralelas à reta especial x então as imagens serão duas retas concorrentes num ponto M' pertencente à reta especial y' .



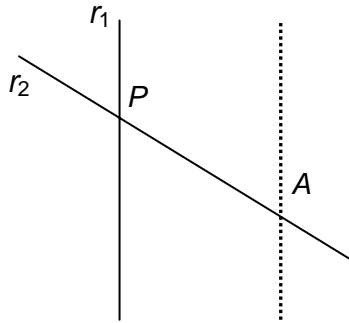
Se r_1 e r_2 são ambas paralelas à reta especial x então as imagens r_1' e r_2' são ambas paralelas à reta especial y' .

Plano Projetivo

Vamos acrescentar aos pontos do plano euclidiano \mathcal{E} uma coleção de pontos ideais, chamados *pontos no infinito*. Faremos isso de modo que sejam preservados os seguintes resultados:

1. Dois pontos distintos determinam uma única reta.
2. Duas retas distintas intersectam-se em um único ponto.

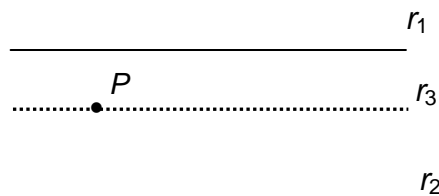
Sejam r_1 e r_2 duas retas do plano euclidiano \mathcal{E} . Mantendo-se r_1 fixada e girando-se r_2 em torno de um fixado ponto $A \in r_2$, A fora da reta r_1 , à medida que r_2 aproxima-se da posição de paralelismo com r_1 o ponto P de intersecção de r_1 e r_2 se afasta mais e mais ao longo de r_1 e, na posição limite de paralelismo o ponto P deixa de existir.



Para acomodar essa situação excepcional, acrescentamos ao conjunto dos pontos sobre r_1 um ponto ideal, chamado *ponto no infinito* sobre r_1 , e dizemos que r_1 e r_2 intersectam-se neste ponto ideal quando r_1 e r_2 forem paralelas.

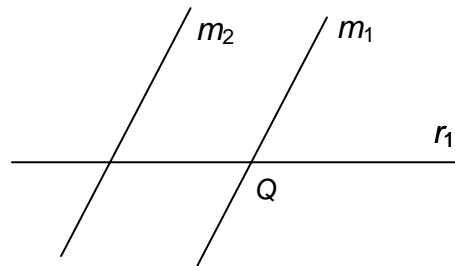
O resultado 2 acima nos garante que duas retas paralelas devem se intersectar no *mesmo* ponto ideal, não importando em qual direção as retas são percorridas.

Sejam r_1 e r_2 duas retas paralelas intersectando-se no ponto ideal I , e seja P um ponto ordinário qualquer, P fora de r_1 e de r_2 . Como P e I determinam uma reta r_3 e como r_3 não pode intersectar r_1 ou r_2 uma segunda vez, segue-se que r_3 deve ser a reta paralela a r_1 e a r_2 passando por P . Em outras palavras, o ponto ideal I pertence às três paralelas r_1 , r_2 e r_3 e, pelo mesmo argumento, a todas as retas paralelas a r_1 . Logo, todos os membros da família de retas paralelas a r_1 concorrem no mesmo ponto ideal I .

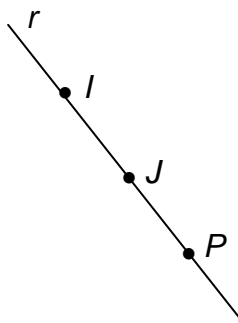


Sendo m_1 uma reta não paralela a r_1 , os membros da família de retas paralelas a m_1 concorrem num ponto ideal J distinto de I . Com efeito, m_1 e r_1 intersectam-

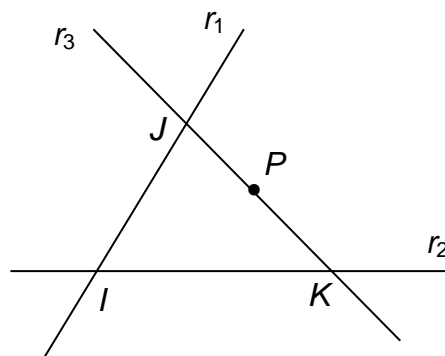
se num ponto ordinário Q e sendo m_2 uma paralela a m_1 , temos que m_1 e m_2 intersectam-se num ponto ideal J distinto de I , pois, caso contrário, as retas distintas r_1 e m_1 teriam dois pontos Q e I em comum.



Considere agora dois pontos ideais distintos I e J . Afirmamos que a reta r por eles determinada contém somente pontos ideais. Com efeito, se existisse um ponto ordinário P pertencente a r , então a reta r_1 determinada por P e I e a reta r_2 determinada por P e J formariam um par de retas ordinárias distintas. Por outro lado, cada uma delas está contida em r uma vez que P , I e J são colineares.



Finalmente, não podemos ter duas retas distintas formadas exclusivamente por pontos ideais. Com efeito, se r_1 e r_2 fossem duas de tais retas, elas se intersectariam num ponto ideal I . Uma reta r_3 passando por um ponto ordinário P e não passando por I intersectaria r_1 e r_2 em pontos ideais distintos J e K , respectivamente. A reta determinada por J e K conteria o ponto ordinário P o que é impossível.



Em resumo, podemos acrescentar aos pontos de um plano euclidiano \mathcal{E} uma coleção de pontos ideais, chamados **pontos no infinito**, tais que

- a) Cada reta do plano euclidiano \mathcal{E} contém exatamente um ponto ideal.
- b) Os membros de uma família de retas paralelas do plano euclidiano \mathcal{E} concorrem num mesmo ponto ideal e famílias distintas de paralelas têm pontos ideais distintos.

A coleção dos pontos ideais adicionados é vista como uma reta ideal, chamada **reta no infinito**, que por sua vez não contém pontos do plano euclidiano \mathcal{E} . Indicamos tal coleção por r_∞ .

O conjunto $\mathcal{E}^* = \mathcal{E} \cup r_\infty$ é chamado **plano projetivo** e temos o seguinte resultado.

Teorema. Em \mathcal{E}^* , dois pontos distintos determinam uma única reta e duas retas distintas intersectam-se em um único ponto.

Voltamos agora a considerar a projeção central P_O de \mathcal{E} em \mathcal{E}' com centro O . Sendo x e y' as retas especiais contidas em \mathcal{E} e \mathcal{E}' , respectivamente, vimos anteriormente que $P_O: \mathcal{E} - x \rightarrow \mathcal{E}' - y'$ é uma aplicação bijetora.

Sendo $\mathcal{E}^* = \mathcal{E} \cup r_\infty$ e $(\mathcal{E}')^* = \mathcal{E}' \cup r_\infty'$ os correspondentes planos projetivos, obtemos uma aplicação bijetora $P_O: \mathcal{E}^* \rightarrow (\mathcal{E}')^*$ definindo:

1. Se $M \in x$ então $P_O(M) \in r_\infty'$ é o ponto ideal associado à reta ordinária $r_1' = P_O(r_1)$ onde r_1 é uma reta arbitrária de \mathcal{E} passando por M , r_1 distinta de x . (veja Problema 2)
2. Se $l \in r_\infty$ é o ponto ideal associado à reta ordinária r_1 de \mathcal{E} , r_1 não paralela a x , então $P_O(l) \in y'$ é o ponto ordinário M' em que $r_1' = P_O(r_1)$ intersecta y' . Se $r_1 \parallel x$ então $P_O(l)$ é o ponto ideal associado à reta y' . (veja Problema 3)